PROGRAMAÇÃO DINÂMICA UMA FERRAMENTA QUANTITATIVA PARA A FUNÇÃO CONTROLADORIA

Luciano de Castro Garcia Leão
Luiz J. Corrar

Resumo:

O presente trabalho objetiva expor, a partir de um exemplo introdutório, os conceitos da Programação Dinâmica Determinística e Probabilística, enquanto ferramenta de análise quantitativa consistente em relação à substância econômica de diversos processos de decisão em múltiplos estágios, o que, logicamente, revela sua aplicabilidade técnica à Controladoria. A teoria dos Custos Correntes de Reposição é utilizada subsidiariamente, de modo a contextualizar o problema dinâmico.

Palavras-chave:

Área temática: *O Papel da Controladoria na Gestão Estratégica de Custos*

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA
UMA FERRAMENTA QUANTITATIVA PARA A FUNÇÃO CONTROLADORIA

Luciano de Castro Garcia Leão
Contador formado pela PUC-MG,
Economista formado pela UFMG,
Mestrando em Contabilidade e Controladoria pela FEA-USP,
Professor do Depto. de Contabilidade da PUC-MG.

Luiz J. Corrar
Doutor em Contabilidade e Controladoria pela FEA-USP,
Professor do Depto. de Contabilidade e Atuária da FEA-USP,
Coordenador do MBA - Gestão Atuarial e Financeira.

Endereço:

Rua Viamão, nº 1139, Aptº 1004
Bairro Grajaú - Belo Horizonte - Minas Gerais
30430-470

Telefone: (031) 332-8708

Resumo:

O presente trabalho objetiva expor, a partir de um exemplo introdutório, os conceitos da Programação Dinâmica Determinística e Probabilística, enquanto ferramenta de análise quantitativa consistente em relação à substância econômica de diversos processos de decisão em múltiplos estágios, o que, logicamente, revela sua aplicabilidade técnica à Controladoria. A teoria dos Custos Correntes de Reposição é utilizada subsidiariamente, de modo a contextualizar o problema dinâmico.

Área Temática:

O papel da Controladoria na Gestão Estratégica de Custos.

1 - Introdução

A natureza da empresa, enquanto unidade de conversão de recursos em produção de bens e serviços para o mercado, é particularmente condicionada pelo corolário de escassez, que torna fundamental a utilização racional e otimizante de tais recursos no processamento das diversas atividades. Deve-se, portanto, buscar escolher, dentre as ações possíveis, aquela que prometa elevar ao máximo o valor esperado do resultado de qualquer decisão ou atitude, ou reduzir ao mínimo o custo envolvido, de forma a otimizar no longo prazo a utilidade dos recursos sacrificados.

Entretanto, por um lado, existem várias atividades ou projetos econômicos a serem implementados, e, por outro, formas alternativas de fazê-lo. Uma (ou algumas) dessas alternativas será(ão), mais desejável(is) do que a(s) outra(s), e isto pode explicar as dificuldades com as quais o tomador de decisão se depara quando da aplicação, dentro de diversas alternativas econômicas viáveis, de um estoque de fatores possuídos, ou que se tenha a possibilidade de utilizar: a essência do comportamento da empresa real, enquanto unidade econômica, evidencia seus esforços deliberados na busca da escolha que atinja uma posição ótima.

2 - Situação-Problema

Considerando, portanto, a realidade da empresa como um ***problema de otimização***, a primeira coisa a ser feita é delinear a função-objetivo, na qual a variável dependente representa o objeto da maximização ou da minimização, e o conjunto de variáveis independentes indica os objetos cujas grandezas a unidade econômica em questão pode controlar e selecionar com vistas à otimização. Tal tarefa pode parecer bastante simples, constituindo-se na determinação do conjunto de valores das variáveis independentes que gera o extremo desejado da função-objetivo; todavia, esta aparente elegância não explicita que as atividades e projetos concorrem pelos recursos da empresa e guardam, entre si, várias relações do ponto de vista econômico.

Dado um par (ou, de forma ampliada, um conjunto de atividades e projetos), eles poderão ser, além de concorrentes, economicamente independentes ou interdependentes (interagentes)[1]. Considere, como coloca MUSCAT[2], que cada projeto concorrente independente n possa ser aceito em uma dentre K^n versões ou que possa ser rejeitado, e sendo N o número de projetos, haverá um total de $(1 + K^n)^N$ alternativas a serem avaliadas. Se consideradas interdependências, aumenta-se drasticamente o número de alternativas, potencializadas pelo número de interações verificáveis. Aqui, parafraseando BELLMAN, a decisão econômica pode ser vista como *"uma escolha de um certo número de variáveis ... dentro de um conjunto de escolhas possíveis"*[3] que deseja determinar a alternativa ótima para o problema de alocação de recursos na empresa.

Tal problema, todavia, é de ***decisões sequenciais*** (ou de múltiplos estágios). Isto porque, como já dito, a decisão de fazer uma coisa (melhorando a linguagem, um processo de decisão de simples estágio) sequencialmente determina:

- a escolha de não fazer ou fazer menos uma outra, para projetos ou atividades concorrentes;

[1] .Serão independentes se os desembolsos e benefícios esperados de um deles forem sempre os mesmos, quer o outro projeto seja aceito, quer seja rejeitado, e vice-versa. Serão interdependentes no caso oposto, ou seja, se os desembolsos e retornos esperados de um dos projetos forem afetados pela decisão de aceitar ou rejeitar o outro, e vice-versa.

[2] .MUSCAT, Antônio Rafael Namur. *Aplicações da Programação Dinâmica à análise de projetos interdependentes*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 1982, p.4.

[3] .BELLMAN, Richard. *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957, P. VIII.

- a necessidade de decisões sobre as atividades e projetos dependentes ou relacionados àquele escolhido, e o consequente abandono das diversas outras atividades e projetos dependentes daqueles rejeitados.

O método convencional de seleção decisorial, rotulado por *enumerativo*, exige a consideração completa do conjunto de escolhas possíveis; tal procedimento parece praticamente impossível, visto que são demasiadas as variáveis reais no ambiente da empresa, sob seu controle ou não, para que esta possa sintetizá-las de maneira simultaneamente formal, adequada e simples. Portanto, deve-se procurar um meio no qual apenas uma pequena parcela das alternativas tenha que ser avaliada e que dela resulte a solução do problema.

Um artifício utilizado na matemática consiste em transformar o problema original em outro que preserve as propriedades do modelo, mas de forma a adaptá-lo à utilização de técnicas específicas; o modelo transformado apresenta-se desfigurado apenas para uma otimização mais fácil e conveniente, mantendo a mesma solução ótima do modelo original. Os trabalhos pioneiros de BELLMAN desenvolveram uma dessas transformações, a ***Programação Dinâmica***, que considera inicialmente um processo de decisão sequencial ou de múltiplos estágios contendo muitas variáveis independentes, e o converte numa série de problemas de simples estágio contendo poucas variáveis.

Em outras palavras, a Programação Dinâmica, disponível à Controladoria, investiga caminhos ótimos para a solução de problemas em sequência. Seu objeto de análise se constitui na determinação e estudo das trajetórias temporais específicas das variáveis, e a busca de uma trajetória ótima para o sistema, considerando a sequência de decisões a ser tomada, cada uma afetando as decisões futuras. Mesmo quando a variável tempo não é relevante, uma decisão entre alternativas possíveis pode ser decomposta em diversas fases lógicas (distintas), de modo que a decisão final é conduzida como se fosse uma série de decisões tomadas ao longo do tempo[4].

Assim, o presente trabalho objetiva expor, a partir de um exemplo introdutório, os conceitos da Programação Dinâmica, enquanto ferramenta de análise quantitativa consistente em relação à substância econômica de diversos processos de decisão em múltiplos estágios, o que, logicamente, revela sua aplicabilidade técnica à Controladoria. A teoria dos Custos Correntes de Reposição será utilizada subsidiariamente, de modo a contextualizar o problema dinâmico.

3 - O Raciocínio

Quando uma série de decisões deve ser tomada em sequência, uma política ótima deve ser determinada. Todavia, a solução popular de buscar a alternativa ótima ***de cada etapa*** não necessariamente conduz a uma decisão ótima, considerando o sistema ***como um todo***. Considerando a existência (bastante plausível, senão generalizada, como visto introdutoriamente) de uma sequência temporal ou lógica entre as decisões a serem tomadas num dado sistema, e que o resultado de N estágios depende do estágio inicial e das decisões tomadas em todo o sistema, a Programação Dinâmica surge uma técnica de procura quebrar problemas difíceis em sequências de subproblemas fáceis, que são então avaliados por estágios.

Assim, o problema é dividido em um número de estágios de decisão; o procedimento de otimização inicia-se no estágio N e se dirige para o estágio 1, obedecendo um determinado critério, de modo que o resultado da decisão em um estágio afete a decisão de cada um dos próximos estágios. O sistema, portanto, é transformado numa ***relação recursiva***, a qual identifica a política ótima para cada estado no estágio n, dada a política ótima[5] para cada estado no estágio (n+1) que, ao contrário de oferecer uma solução para um estágio único (um período de tempo), determina uma solução ótima num horizonte temporal, dividindo-o em problemas de horizontes menores e resolvendo cada um deles otimizadamente, ou seja, utilizando um método de multiestágios.

4 .WAGNER, Harvey M. Pesquisa Operacional. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986, p. 277.

5 .A componente tempo é considerada apenas em duas formas: o presente e o período imediatamente anterior.

Esta transformação se fundamenta no Princípio da Condição de Ótimo, de BELLMAN que estabelece: ***um conjunto ótimo de decisões sequenciais tem a propriedade de, qualquer que seja a primeira decisão, as decisões remanescentes constituem-se num conjunto ótimo relacionado àquela primeira decisão***. O significado disto é que a otimidade da decisão corrente é julgada em termos do seu impacto econômico previsto apenas sobre o estágio atual e todos os estágios subsequentes, independetemente dos estágios anteriores (ou seja, do percurso tomado para chegar ao estágio atual).

4 - Elementos e Terminologia de um Problema de Programação Dinâmica

Desconsiderando o tipo ou tamanho de um Problema de Programação Dinâmica, há alguns termos e conceitos importantes que são inerentes a todos os problemas:

1) Estágio: consiste numa variável discreta (n) que determina a ordem em que ocorrem as alterações do sistema em estudo, caracterizando um período ou um subproblema lógico.

$$n = 0,1,2,.., \mathrm{N}$$

2) Variável Estado (ou Variáveis de Entrada - Input): é uma variável (s) que descreve situações ou condições iniciais possíveis do sistema num dado estágio.

$$s \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$$

3) Conjunto de estados viáveis: é o conjunto finito dos estados que s pode assumir no estágio n. O número de elementos s é sempre finito.

$$S_{\mathrm{n}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$$

4) Estado inicial: é o estado em que se encontra o sistema no estágio inicial s_0. Este estado é único.

5) Alvo: conjunto S_{n} de estados viáveis.

6) Variável de Decisão: constitui-se numa variável d que aplicada ao sistema quando ele se encontra no estado s, influencia de alguma forma o estado em que o sistema se encontrará no estágio seguinte ($n + 1$). Representa a oportunidade para mudarmos a variável de estado, partindo de alternativas ou possíveis decisões que existam em cada estágio.

$$d_{\mathrm{n}}$$

7) Conjunto de decisões admissíveis: é o conjunto finito das decisões que podem atuar sobre o sistema quando ele se encontra no estágio n e no estado s.

$$D_{\mathrm{n}}(s)$$

8) Política admissível: é uma sequência de decisões.

9) Trajetória: é o conjunto de pontos gerados por uma política admissível.

10) Critério de decisão: é um enunciado ou afirmação considerando o objetivo do problema, materializando-se num operador genérico que geralmente assume a significação somatório ou produtório.

11) Política Ótima: um conjunto de regras de decisão, desenvolvidas como resultado de um critério de decisão, que oferece decisões ótimas para qualquer condição ingressante para qualquer estágio.

12) Equação recursiva do sistema (ou Transformação): é um enunciado algébrico que revela o relacionamento entre os estágios, ou seja, uma equação que descreva a relação entre o estado num dado estágio, a decisão então aplicada e o novo estado resultante. Dado que o sistema esteja em s, $R_{\mathrm{n}}(s,d_{\mathrm{n}})$ representa o retorno econômico imediato da decisão d_{n}, *e* $T_{\mathrm{n}}(s,d_{\mathrm{n}})$ o estado transformado do sistema em (n - 1). Então,

$$f_{\mathrm{n}}(s) = \underset{\mathrm{d_{n}\ em\ D_{n}(s)}}{\text{ótimo}} \{ R_{\mathrm{n}}(s,d_{\mathrm{n}}) + f_{\mathrm{n-1}} [T_{\mathrm{n}}(s,d_{\mathrm{n}})]\} \text{ para todos os } s \text{ em } S_{\mathrm{n}}$$

(onde *ótimo* significa máximo ou mínimo, dependendo do contexto particular).

13) O Problema de Programação Dinâmica: encontrar, se existir, uma política admissível que aplicada ao estado inicial, leva o sistema ao estágio N, otimizando o valor da função critério. O principio da Otimidade, referido anteriormente, assumiria a forma: “Se ‡ é uma política ótima, considerando-se s_0 como estado inicial, então a política (‡ + 1) será uma política ótima considerando-se s_1 como estado inicial”.

5 - Tipos de Programação Dinâmica

A Equação recursiva do sistema descreve a relação entre o estado num dado estágio, a decisão então aplicada e o novo estado resultante, de modo que a sequência de decisões tomadas é afetada pela mudança líquida da variável de estado em um determinado período. É a natureza desta relação (determinística ou probabilística) que caracteriza o tipo do Problema de Programação Dinâmica; assim, será resolvido um exemplo introdutório de Programação Dinâmica (com etapa determinística e probabilística)[6].

5.1 - O cenário

Pedro Maninho, proprietário do Frigorífico Xanadú, tem 6 bois disponíveis para o abate, que lhe custaram R$ 23,00 e podem ser distribuídos entre seus açougues, presentes em três mercados diferentes (ou seja, ele tem ***N = 6 bois***, a um custo de R$ 23,00, para distribuir a ***s = 3 açougues***; suponha que ele não possa repartir um boi para enviar as peças a mais de um açougue); ao final de cada dia, Pedro Maninho repõe seu estoque, negociando com 3 fazendeiros diferentes. Os custos diários de remessa dos bois aos açougues, comercialização junto aos consumidores finais dos três mercados e deslocamento e negociação com fornecedores de bois, perfazem um total de R$ 20,00 e são considerados fixos. Pedro Maninho pediu que seu controller determinasse o número inteiro de bois que poderia ser distribuído em cada mercado, e o número inteiro de bois a ser adquirido de cada fazendeiro, para otimizar seu lucro total esperado.

5.2 - Programação Dinâmica Determinística

Trata de problemas onde o estado na etapa seguinte é completamente determinado pelo estado e decisão na etapa atual; no caso de Pedro Maninho, isto se refere às possibilidades de reposição, plenamente determinadas por meio de cotação junto aos três fazendeiros:

Número de Bois	**Custos Variáveis**		
	Fazenda A	Fazenda B	Fazenda C
y	$R_A(y)$	$R_B(y)$	$R_C(y)$
0	0	0	0
1	6	5	5
2	9	9	7
3	13	14	13
4	19	17	17
5	23	21	21
6	25	27	26

A alternativa que aparentemente minimiza os custos de reposição é a de comprar os seis bois com o fazendeiro A, obtendo um custo máximo esperado de R$ 25,00; porém, Pedro Maninho suspeita que há uma distribuição alternativa de reposição de bois que otimiza seu custo total, ou seja, que ele não deve comprar todos os bois de um mesmo fornecedor.

6 .Por simplificação, todos os valores estão considerados à vista, tanto os preços de venda quanto os custos de reposição. Os cálculos apresentados são facilmente programáveis no software MS-Excel.

Considere y_j o número de bois negociados com o fazendeiro j e $R_j(y)$ o custo resultante com o fazendeiro j quando $y_j = y$. Em notação geral, o problema de Pedro Maninho pode ser formulado como

$$\text{minimize} \sum_{j=1}^{s} R_j(y_j)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^{s} y_j = N \text{ (número disponível de bois negociáveis)}$$

$$y_j = 0, 1, 2, \ldots \text{ para cada j (compra somente “bois inteiros”, é óbvio!)}$$

Embora este problema não seja realmente dinâmico (todas as variáveis de decisão relacionam-se a um único período de tempo), Pedro Maninho decide sobre as quantidades y_j sequencialmente, começando com o fazendeiro C, em seguida o fazendeiro B e, finalmente, o fazendeiro A; desta forma, as decisões são tomadas em estágios.

A fórmula recursiva de programação dinâmica correspondente é,

$$g_j(n) = \underset{y}{\text{mínimo}} \; [\, R_j(y) + g_{j-1}(n - y)] \text{ para } j = 1, 2, \ldots, s$$

(sendo $g_j(n)$ o custo quando n bois são negociados otimamente com o fazendeiro A, com o fazendeiro B ... e ao fazendeiro j e $y_j(n)$ a quantidade negociada com o fazendeiro j que fornece $g_j(n)$)

$$g_0(n) = \text{ para } j = 0$$
$$n = 0, 1, \ldots, N$$

e a minimização apenas para valores inteiros não-negativos de y que satisfazem a condição de viabilidade

$$n \geq y$$

(ou seja, não podem ser negociados mais bois y que os n desejados).

Esta recursão afirma que o custo ao comprar otimamente n bois dos fazendeiros A, B, ..., j pode ser calculado achando uma decisão y de melhor fazendeiro j levando em conta tanto seu impacto no custo imediato $R_j(y)$ como seu impacto no custo por ter $n - y$ bois restantes para comprar otimamente nos fazendeiros A, B, ..., $j - 1$.

5.2.1 - Os cálculos

Começando do último estágio j = A, o custo no fazendeiro A aumenta quanto mais bois forem comprados, e assim

$$g_A(n) = R_A(n) \text{ e}$$
$$y_j(n) = n \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, 6 \text{ (pois } g_0(n) = 0 \text{ para } j = 0)$$

Bois negociados

n	$y_A(n)$	$g_A(n)$
0	0	0
1	1	6
2	2	9
3	3	13
4	4	19

5	5	23
6	6	25

Para o estágio j = B,

$$g_B(n) = R_B(y) + g_A(n-y)$$
$$n \geq y_B(n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, ..., 6$$

		y								
	n	0	1	2	3	4	5	6	**$y_B(n)$**	**$g_B(n)$**
	0	0							0	0
	1	6	5						1	5
Bois	2	9	11	9					0 , 2	9
negociados	3	13	14	15	14				0	13
	4	19	18	18	20	17			4	17
	5	23	24	22	23	23	21		5	21
	6	25	28	28	27	26	27	27	0	25

Para o estágio j = C,

$$g_C(n) = R_C(y) + g_B(n-y)$$
$$n \geq y_C(n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, ..., 6$$

		y								
	n	0	1	2	3	4	5	6	**$y_C(n)$**	**$g_C(n)$**
	0	0							0	0
	1	5	5						0 , 1	5
Bois	2	9	10	7					2	7
negociados	3	13	14	12	13				2	12
	4	17	18	16	18	17			2	16
	5	21	22	20	22	22	21		2	20
	6	25	26	24	26	26	26	26	2	24

5.2.2 - Análise de Sensibilidade

Assim, a estratégia ótima para a reposição dos bois que Pedro Maninho deverá usar ao final do dia é:

		j = A		***j = B***		***j = C***	
	n	**$y_A(n)$**	**$g_A(n)$**	**$y_B(n)$**	**$g_B(n)$**	**$y_C(n)$**	**$g_C(n)$**
	0	**0**	0	0	0	0	0
	1	1	6	1	5	0 , 1	5
Bois	2	2	9	0 , 2	9	2	7
negociados	3	3	13	0	13	2	12
	4	4	19	**4**	17	2	16
	5	5	23	5	21	2	20
	6	6	25	0	25	**2**	24

Deve ser observado que, quando houver 6 bois disponíveis para negociar com os fazendeiros C, B e A, a decisão ótima no fazendeiro C é y_C (6) = 2 bois. Em decorrência disto, n = 6 - 2 = 4 bois disponíveis para serem comprados nos dois primeiros fazendeiros; consequentemente, a decisão ótima no fazendeiro B, com 4 bois disponíveis, é y_B(4) = 4. Enfim, a decisão ótima com o fazendeiro A é, paradoxalmente, y_A (0) = 0, ou seja, não comprar nada nesta fazenda. O custo total correspondente é g_C (6) = 24 (a soma de 0 + 17 +7).

Número de Bois *y*	Custos Variáveis		
	Fazenda A $R_A(y)$	Fazenda B $R_B(y)$	Fazenda C $R_C(y)$
0	**0**	0	0
1	6	5	5
2	9	9	**7**
3	13	14	13
4	19	**17**	17
5	23	21	21
6	25	27	26

Algumas outras considerações podem ser feitas com relação à sensibilidade. Se, por exemplo, depois que dois bois foram comprados no fazendeiro C, Pedro Maninho resolver deixar de repôr um boi (sobrando, portanto, 3 bois para comprar aos fazendeiros B e A), a distribuição ótima é revista para y_B (3) = 0 (com n = 3 - 0 = 3 bois restantes para o fazendeiro A), e y_A (3) = 3. O custo total correspondente é menor, assim sendo, g_C (6) = 20 (a soma de 13 + 0 + 7).

5.3 - Programação Dinâmica Probabilística

A mudança líquida da variável de estado em um determinado período está sujeita a uma determinada incerteza, o que afeta a sequência de decisões a serem tomadas. Existe uma distribuição probabilística para qual será o próximo estado, de origem objetiva (frequência relativa de ocorrência, lógica ou histórica), ou subjetiva (julgamento). No caso, Pedro Maninho têm à sua disposição seis bois para distribuição em três mercados; todavia, o preço praticado por boi vendido nos mercados é segmentado em diferentes perfis de consumidores, e a demanda de bois em cada um deles é aleatória, de acordo com as distribuições de probabilidades mostradas abaixo:

Receita total à vista por boi descarnado		
Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
18,0	20,0	21,0

	Probabilidades de Demanda		
Bois	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
0	0,1	0,0	0,1
1	0,2	0,2	0,1
2	0,3	0,4	0,3
3	0,2	0,2	0,2
4	0,1	0,2	0,1

5	0,1	0,0	0,1
6	0,0	0,0	0,1

Pedro Maninho gostaria de determinar o número inteiro de bois que deveria ser distribuído em cada mercado, para otimizar o faturamento total esperado. Este é um processo de decisão de três estágios, com o estágio j representando uma distribuição de bois no mercado j. Os estados, em cada estágio, são s = 0, 1, ..., 6 , representando o número de bois disponíveis para distribuição em um mercado.

Não existe aleatoriedade no estado resultante de qualquer decisão, mas existe aleatoriedade no resultado de qualquer estado. Por exemplo, com dois bois destinados a um determinado mercado, ele poderá consumir 0, 1 ou 2 lotes, com cada possibilidade gerando um faturamento diferente. Consequentemente, deve-se maximizar o faturamento total ***esperado*** ao invés do faturamento total. Sendo:

$$L_n(s,d_n) = \max_{d_n \text{ em } D_n(s)} \{l_n(s,d_n) + l_{n-1}[T_n(s,d_n)]\} \text{ para todos } s \text{ em } S_n$$

onde

$l_n(s,d_n)$, o faturamento esperado pela distribuição de s bois ao mercado n

$L_n(s,d_n)$, o faturamento total esperado iniciando pelo estágio s no estado n

d_n , a decisão tomada no estágio s que gera $L_n(s,d_n)$ e

$$n \geq y.$$

5.3.1 - Os cálculos

Os valores das funções de faturamento esperado (em valores monetários) estão dispostos abaixo. Os cálculos do valor esperado foram elaborados de maneira trivial: se, por exemplo, $y_1(3)$, segue: com 3 bois distribuídos ao mercado 1, o mercado 1 consegue um faturamento de R$ 0,00 se 0 bois são vendidos (com 0,1 de probabilidade); R$ 18,00 se 1 boi é vendido (com 0,2 de probabilidade); R$ 36,00 se 2 bois são vendidos (com 0,3 de probabilidade); e R$ 54,00 se 3 bois são vendidos (com 1 - 0,1 - 0,2 - 0,3 = 0,4 de probabilidade, ou a probabilidade da demanda ser igual ou maior que 3 bois => 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4). Assim,

$$y_1(3) = (0 \text{ x } 0{,}1) + (18 \text{ x } 0{,}2) + (36 \text{ x } 0{,}3) + (54 \text{ x } 0{,}4) = \text{R\$ } 36{,}00$$

e assim sucessivamente.

	Faturamento esperado		
Bois	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
0	0,0	0,0	0,0
1	16,2	20,0	18,9
2	28,8	36,0	35,7
3	36,0	44,0	46,2
4	39,6	48,0	52,5
5	41,4	48,0	56,7
6	41,4	48,0	58,8

Com estes procedimentos, que consideram a aleatoriedade nos resultados relacionados com os estados, o problema estocástico está transformado num problema determinístico, com solução idêntica à do tópico 5.2. Começando do último estágio j = 1, o faturamento no mercado 1 aumenta quanto mais bois forem remetidos, e assim,

$$L_1(n) = l_1(n) \text{ e}$$

$$y_j(n) = n \quad \text{para } n = 0, 1, 2, ..., 6 \text{ (pois } L_0(n) = 0 \text{ para } j = 0)$$

Bois	$y_1(n)$	$L_1(n)$
0	0	0,0
1	1	16,2
2	2	28,8
3	3	36,0
4	4	39,6
5	5	41,4
6	6	41,4

Para o estágio $j = 2$,

$$L_2(n) = l_2(y) + L_1(n-y)$$
$$n \geq y_2(n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, ..., 6$$

	y								
Bois	0	1	2	3	4	5	6	$y_2(n)$	$L_2(n)$
0	0,0							0	0,0
1	16,2	20,0						1	20,0
2	28,8	36,2	36,0					1	36,2
3	36,0	48,8	52,2	44,0				2	52,2
4	39,6	56,0	64,8	60,2	48,0			2	64,8
5	41,4	59,6	72,0	72,8	64,2	48,0		3	72,8
6	41,4	61,4	75,6	80,0	76,8	64,2	48,0	3	80,0

Para o estágio $j = 3$,

$$L_3(n) = l_3(y) + L_2(n-y)$$
$$n \geq y_3(n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, ..., 6$$

	y								
Lotes	0	1	2	3	4	5	6	$y_3(n)$	$L_3(n)$
0	0,0							0	0,0
1	20,0	18,9						0	20,0
2	36,2	38,9	35,7					1	38,9
3	52,2	55,1	55,7	46,2				2	55,7
4	64,8	71,1	71,9	66,2	52,5			2	71,9
5	72,8	83,7	87,9	82,4	72,5	56,7		2	87,9
6	80,0	91,7	100,5	98,4	88,7	76,7	58,8	2	100,5

5.3.2 - Análise de Sensibilidade

Assim, a estratégia ótima de vendas de Pedro Maninho é:

	j = 1		*j = 2*		*j = 3*	
n	**Y1(n)**	**L1(n)**	**Y2(n)**	**L2(n)**	**Y3(n)**	**L3(n)**
0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
1	1	16,2	1	20,0	0	20,0
2	**2**	28,8	1	36,2	1	38,9
3	3	36,0	2	52,2	2	55,7
4	4	39,6	**2**	64,8	2	71,9
5	5	41,4	3	72,8	2	87,9
6	6	41,4	3	80,0	**2**	100,5

Deve ser observado que, quando houverem 6 bois disponíveis para distribuir aos mercados 3, 2 e 1, a decisão ótima do mercado 3 é y_3 (6) = 2. Isto implica em n = 6 - 2 = 4 bois disponíveis para os dois primeiros mercados. Com 4 bois disponíveis, a decisão ótima para o mercado 2 é y_2 (4) = 2 bois. Em decorrência disto, com n = 4 - 2 = 2 bois disponíveis, a decisão ótima do mercado 1 é y_1 (2) = 2. O faturamento total correspondente é L_3(6) = 100,5 (a soma de 28,8 + 36,0 + 35,7).

	Faturamento esperado		
Bois	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
0	0,0	0,0	0,0
1	16,2	20,0	18,9
2	**28,8**	**36,0**	**35,7**
3	36,0	44,0	46,2
4	39,6	48,0	52,5
5	41,4	48,0	56,7
6	41,4	48,0	58,8

6 - Considerações Finais

Quais as implicações sobre o conteúdo empírico da Controladoria advindas de modificações nos processos econômicos, devido a universalidade de eventos que podem pressionar a ocorrência de decisões sequenciais? A manifestação do campo da Controladoria é evidente: a exploração dos elos produtivos exige fluxos de informações que permitam a ocorrência da otimização ou da coordenação, e dificuldades reais em reconhecer e administrar tais elos frequentemente têm levado ao seu negligenciamento, deixando de direcionar as ações agentes e instrumentalizar a alocação dos recursos no aproveitamento dos benefícios e potencialidades dos investimentos nas situações mais adequadas ou ótimas.

No caso de Pedro Maninho, a solução popular de buscar a alternativa ótima de cada etapa realmente não conduziria a uma decisão ótima, considerando o sistema como um todo. Assim, o controller descuidado poderia orientar a venda de todos os bois no açougue do mercado 3, repondo-os, ao fim do dia, no fazendeiro A, com o seguinte resultado:

Demonstração de Resultados (esperados)	
Receita Operacional	58,8
Custos Variáveis de Reposição	25
Margem de Contribuição	33,8
Custo Fixo	20
Lucro Corrente	**13,8**
Economia de custo realizada no período	**2**
Lucro Corrente realizado = Lucro Líquido	**15,8**

Esta consideração de situações estáticas poderia inclusive levar ao absurdo de sugerir uma redução nas vendas, ou seja, a hipótese aventada de Pedro Maninho comprar apenas 5 bois pareceria, como sofisma, mais lucrativa em termos correntes:

Demonstração de Resultados (esperados)	
Receita Operacional	56,7
Custos Variáveis de Reposição	20
Margem de Contribuição	36,7
Custo Fixo	20
Lucro Corrente	**16,7**

A evidente aplicação da Programação Dinâmica como ferramenta fundamental para a Controladoria de sistemas, ainda que lamentavelmente não sugerida pelo próprio BELLMAN, se materializa na possibilidade de determinar o estado e o comportamento do sistema num determinado instante futuro (ou preferivelmente em qualquer instante futuro) a partir do estado atual, ou seja, uma noção de estratégia[7]. É mais eficiente que enumerar e calcular todas as políticas possíveis, mas ainda constitui tarefa árdua pois, como diria Han Yu, ***"quem senta no fundo de um poço para contemplar o céu, há de achá-lo pequeno"***. Assim, o controller estrategista orientaria, dinamicamente, a venda de dois bois em cada mercado, e a reposição de 2 bois com o fazendeiro C e 4 bois com o fazendeiro B, com os seguintes resultados:

Demonstração de Resultados (esperados)	
Receita Operacional	100,5
Custos Variáveis de Reposição	24
Margem de Contribuição	76,5
Custo Fixo	20
Lucro Corrente	**56,5**
Economia de custo realizada no período	**1**
Lucro Corrente realizado = Lucro Líquido	**57,5**

[7] . WAGNER, Harvey M. Op. Cit. p. 298.

Como visto, a Programação Dinâmica trata justamente de problemas relacionados a sistemas dinâmicos, buscando considerar elementos interdependentes que interagem na consecução de um objetivo comum. É talvez a técnica quantitativa que apresenta o conceito mais simples e, todavia, o de mais difícil aplicação pois, ao contrário de outras técnicas matemáticas, na Programação Dinâmica não existe uma formulação padrão para a solução de problemas: ela é um tipo geral de abordagem, e as equações particulares usadas tem que ser desenvolvidas para se ajustarem a cada situação em particular.

Um aspecto importante diz respeito às vantagens da Programação Dinâmica vis-a-vis a enumeração exaustiva: já se provou a eficiência, mas e a eficácia? Em várias outras situações presentes na bibliografia, como o problema do caixeiro-viajante, o problema de "redes acíclicas", ou mesmo o popular problema da "mochila", fica ainda mais evidente que o método recursivo poupa bastante trabalho, seja braçal ou computacional. Entretanto, poder-se-ía classificar a solução dinâmica, em alguns destes casos, como "muito boa", porém não como "ótima". Realmente, a tão sonhada solução ótima para tais problemas (conhecidos como problemas "NP completos") só pode matematicamente ser comprovada por enumeração exaustiva[8]. A exemplificação aqui proposta, apesar de evidenciar decisões sequenciais, era não temporalmente dependente, de modo que a escolha do ponto de partida da resolução ficou à vontade do autor. Fica, para o leitor, o teste de calcular os resultados se outra ordem de início e fim das recursões fosse utilizada!

Por fim, uma característica de qualquer modelo é não levar em conta todas as variáveis, nem todas as interações entre as variáveis. Também na Programação Dinâmica, a formulação do processo exige, como visto, boa dose de idealização e aproximação, concentrando em algum aspecto particular do sistema, eliminando outros irrelevantes. Isto não desmerece a técnica exposta, ao contrário, mas lhe impõe limites: de fato, o problema proposto envolveu simplificações em prol da didática, que poderiam ter sido relaxadas, acrescentando-se elementos dinâmicos e aleatoriedades nos custos (tanto variáveis quanto fixos); estas aproximações à realidade incluiriam trabalhos adicionais, sem todavia modificar o raciocínio.

Contudo, numa situação real, a taxa de variação de uma variável selecionada depende de outras porventura desconsideradas, e o comportamento destas descartadas depende de outras, assim até o infinito. A palavra dinâmica, por este ponto de vista do materialismo histórico, evidencia que a realidade não se constitui numa sucessão de problemas isolados, mas uma cadeia de problemas e soluções relacionados, que, no limite da dialética, se eleva ao ponto em que cada solução conduza naturalmente para mais problemas.

[8] . SEDGEWICK, Robert. *Algorithms*. 2. ed. Reading: Adison-Wesley, 1990.

7 - Bibliografia

AWH, Robert Y. *Microeconomia: Teoria e aplicações*. Rio de Janeiro : LTC, 1979.

BELLMAN, Richard. *Dynamic Programming.* Princeton: Princeton University Press, 1957.

BRONSON, Richard. *Pesquisa Operacional.* São Paulo: McGraw-Hill, 1985.

CHIANG, Alpha. *Matemática para Economistas*. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

GWARTNEY, James David; STROUP, Richard. *Microeconomics: Private and Public choice.* 2. ed. New York: Academic Press, 1980.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. *Introdução à Pesquisa Operacional.* São Paulo: Campus, 1988.

KAUFMANN, A.; FAURE, R. *Introdução à Investigação Operacional.* São Paulo: Livros Horizonte, 1966.

MACHLUP, Fritz. *Essays on Economic Semantics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1963.

MANSFIELD, Edwin. *Microeconomia: Teoria e aplicações.* Rio de Janeiro: Campus, 1978.

MUSCAT, Antônio Rafael Namur. *Aplicações da Programação Dinâmica à análise de projetos interdependentes*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 1982.

PANHOCA, Luiz. *Programação Dinâmica*. Trabalho de Avaliação na Disciplina de Contabilometria. São Paulo: USP, 1996.

RENDER, Barry; STAIR JR., Ralph M. Quantitative Analysis for Management. 6. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1997.

SEDGEWICK, Robert. *Algorithms.* 2. ed. Reading: Adison-Wesley, 1990.

SHAMBLIN, James E.; STEVENS JR., G. T. *Pesquisa Operacional: uma abordagem básica.* São Paulo: Atlas, 1989.

SHIMIZU, Tamio. *Pesquisa Operacional em Engenharia, Economia e Adiministração.* Rio de Janeiro: Guanabara, 1984.

SIMONSEN, Mário Henrique. *Teoria Microeconômica* . vol. 3 : Teoria da Concorrência Perfeita. 1. ed. Rio de Janeiro: FGV, 1969.

STEVENSON, William J. *Estatística aplicada à Administração*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1981.

TORRES, Roldão Gomes. *Aplicação de Programação Dinâmica na Formulação de Políticas de Investimentos: otimização aplicada especialmente a modelos macro-econômicos de crescimento*. Recife: CONDEPE, 1973.

TURBAN, Efraim; MEREDITH, Jack R. *Fundamentals of management science*. 6. ed. Illinois: Irwin, 1994.

WAGNER, Harvey M. *Pesquisa Operacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986.

WINSTON, Waine L. *Operations Research: applications and algorithms*. 3. ed. Belmont: Duxbury Press, 1994.